半空間でのRellich型定理について (代数解析学の最近の発展)

柴田, 良弘

数理解析研究所講究録
361巻 1979年 9-31

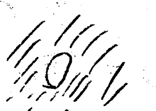
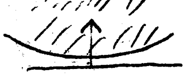
半空間での Rellich 型定理について

筑波大 数学系 柴田 良弘

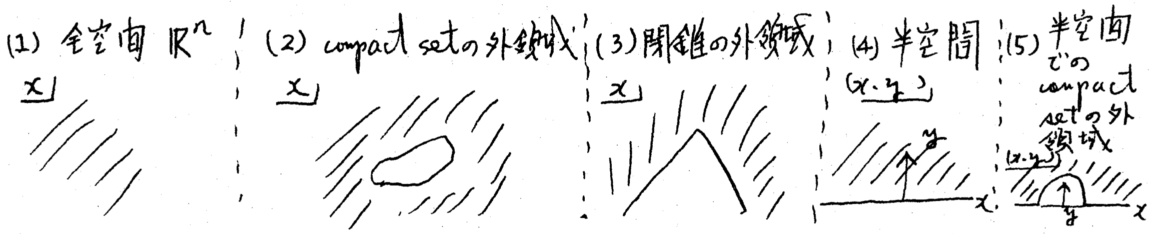
§1. Introduction. Rellich [8] により次の定理が本質的に示された。

<u>定理1</u> (i) $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|\geq R_0\}$, $(\Delta+k^2)u=0$ $(k\neq 0)$ in Ω の解 $u\in\mathcal{D}'\cap L^2_{loc}$ が $\liminf_{R\to\infty} R^{-1}\int_{R\leq|x|\leq 2R}|u(x)|^2\,dx=0$ を満足する $\Rightarrow$ $u\equiv 0$ in Ω.

(ii). Ω を $\mathbb{R}^{n+1}_+=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1};\ y\geq 0,\ x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\}$ の領域で, $\partial\Omega$ (Ω の boundary) は滑らか かつ連結集合とする。さらに $\Omega_R=\{(x,y)\in\Omega;\ 0\leq|x|^2+y^2\leq R^2\}$ は連結. さらに y-軸の正の部分と $\partial\Omega$ の各点での外法線のなす角度が $\pi/2$ 以上とする。このとき $(\Delta+k^2)u=0$ in Ω, $u=0$ on $\partial\Omega$ の解 $u\in\mathcal{D}'\cap L^2_{loc}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ が $\limsup_{R\to\infty} R^{-1}\int_{\Omega_R}|u|^2\,dx\,dy=0$ を満足する $\Rightarrow$ $u\equiv 0$ in Ω ∎

上の定理で(i)での Ω は  の様な領域であり(ii)での Ω は  x or  x の様な領域である。最近

以下の様な型の領域Ω:



について、一般の定数係数作用素を $P(D)=P(-\sqrt{-1}\,\partial/\partial x)$ ((1),(2),(3)) ($=P(-\sqrt{-1}\,\partial/\partial x,\ -\sqrt{-1}\,\partial/\partial y)$, (4),(5))として、領域$\Omega$で $P(D)u=0$ を満足する解 $u\in\mathcal{S}'\cap L^2_{loc}$ の無限遠での増大度の下限と $P(\xi)=0$, なる $\xi\in\mathbb{R}^n$, での real characteristic の幾何との関連を調べることが行なわれてきた。(1), (2)の領域については、Littman [3], Hörmander [2], Murata [5, 6], (3)については Murata-Shibata [7], Littman [4] (4)については一般的な境界値条件を課して(これは必然的である。)Shibata [9]により完全な結果が得られている。このノートでは(5)についての一般的な結果を述べることとする。尚証明の細かい所は後に刊行される論文を参考にしてもらいたい。

§2. Main Results. R^{n+1}を$n+1$次元ユークリッド空間その点を $(x, y)=(x_1,\cdots,x_n, y)$、双対空間もまた$R^{n+1}$で表わし、その点を $(\xi,\lambda)=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\lambda)$ で表わす。C^nをn-複素空間とし、その点を $\xi+\sqrt{-1}\eta=(\xi_1+\sqrt{-1}\eta_1,\cdots,\ \xi_n+\sqrt{-1}\eta_n)$で

表わす。微分記号を $D=(D_x, D_y)=(-\sqrt{-1}\partial/\partial x_1, \ldots, \sqrt{-1}\partial/\partial x_n, -\sqrt{-1}\partial/\partial y)$ で表わす。$P(D)$, $B_j(D)$, $j=1, \ldots, p$ を定係数作用素とし 次の境界値問題を考える。

(2.1) $P(D)u = f(x, y)$, in $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; y>0\}$.

(2.2) $B_j(D)u|_{y=0} = g_j(x)$, $j=1, \ldots, p$ in $\mathbb{R}^n$.

まず, $\{P(D), B_j(D), j=1, \ldots, p\}$ の満足すべき条件を述べる。

(A.1) $P(D) = D_y^m + \sum_{j=1}^m p_j(D_x) D_y^{m-j}$ の形である。ここで $p_j(D_x)$ は D_x についての定係数微分多項式。 ◻

次に, $P(\xi, \lambda) = \{\prod_j (\lambda - \lambda_j)\} Q(\xi, \lambda)$ とおく。ここで λ_j は定数, $Q(\xi, \lambda)=0$ の λ についての根には ξ について定数はないとする。$\lambda \in \mathbb{R}^1$ として $Q(\zeta, \lambda) = \overline{Q(\zeta, \lambda)} = 0$ から λ を消去して得られる $\zeta = \xi + i\eta$ としたときの (ξ, η) についての多項式を $R(\xi, \eta)$ とおく。W_j を $\mathbb{C}^n - \{\xi + i\eta \in \mathbb{C}^n;$ $R(\xi, \eta)=0\}$ の各 connected component とする。W_j の個数は有限個である。$W_j \ni \zeta$ のときの $P(\zeta, \lambda)=0$ の λ についての根はすべて non-real である。こうして positive imaginary part をもつ根の個数は W_j では一定で, その総数を βW_j とおく。

(A.2) $m \geq p \geq \beta W_j$ が各 W_j について成立する。 ◻

(A.3) 各 W_j について $\exists \sigma = (\sigma(1), \ldots \sigma(\beta W_j))$, $(1 \leq \sigma(l) \leq p$, $\sigma(i) \neq \sigma(i')$ if $i \neq i'$.) s.t

$$\det\left(\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{B_{a(k)}(\xi,\lambda)\lambda^{\ell-1}}{P^+(\xi,\lambda)}d\lambda\right)_{k,\ell=1\cdots\beta_{W_j}} \neq 0 \quad , \xi\in W_j$$

が成立する。ここで，$P^+(\xi,\lambda)=\prod_{k=1}^{\beta_{W_j}}(\lambda-\lambda_k^+(\xi))$，$\lambda_k^+(\xi)$ は，$P(\xi,\lambda)=0$ の正の虚数部分をもつλについての根。

以下 (A.1)～(A.3) を満足する系 $\{P(D), B_j(D), j=1,\cdots p\}$ について (2.1)，(2.2) を考える。そこで $P(\xi,\lambda)=\prod_{j=1}^{\alpha}P_j(\xi,\lambda)^{\alpha_j}$，$P_j(\xi,\lambda)$ は irreducible poly，と因数分解する。今ある $\tilde{\alpha}$ ($0\leq\tilde{\alpha}\leq\alpha$) があって $P_1(\xi,\lambda),\ldots P_{\tilde{\alpha}}(\xi,\lambda)$ は実係数，$P_{\tilde{\alpha}+1}(\xi,\lambda),\ldots,P_\alpha(\xi,\lambda)$ は実係数多項式に平行ではないとして一般性を失なわない。このとき，

$$\tilde{P}(\xi,\lambda)=\prod_{j=1}^{\tilde{\alpha}}P_j(\xi,\lambda)\cdot\prod_{j=\tilde{\alpha}+1}^{\alpha}|P_j(\xi,\lambda)|^2,\quad (\xi,\lambda)\in\mathbb{R}^{n+1}$$

で (ξ,λ) の多項式を定義する。$\tilde{P}(\xi,\lambda)$ と $\frac{\partial\tilde{P}}{\partial\lambda}(\xi,\lambda)$ の総結式を $R(\xi)$ とおく。$R(\xi)\neq0$，$\xi\in\mathbb{R}^n$，なる $\mathbb{R}^n$ の各極大連結集合を V_j で表わす。V_j の個数は有限個である。今簡単の為に V_j を V で表わす。また各 V 毎に決まる量についても添字の V を省くことにする。$\xi\in V$ の時 $P(\xi,\lambda)=0$ の λ についての根はすべて real analytic であり，さらに constant multiplicity をもち，次の様に分類される。

$\lambda_j^+(\xi)$, $j=1,\cdots,\beta$, multiplicity 各 β_j , $\operatorname{Im}\lambda_j^+(\xi)>0$.

$\lambda_j^0(\xi)$, $j=1,\cdots,\gamma$, multiplicity 各 γ_j , $\operatorname{Im}\lambda_j^0(\xi)=0$

$\lambda_j^-(\xi)$, $j=1\cdots\delta$, multiplicity 各 δ_j , $\operatorname{Im}\lambda_j^-(\xi)=0$

$P(\xi,\lambda)=\prod_{j=1}^{\beta}(\lambda-\lambda_j^{+}(\xi))^{\beta_j}\prod_{j=1}^{\sigma}(\lambda-\lambda_j^{0}(\xi))^{\sigma_j}\prod_{j=1}^{\delta}(\lambda-\lambda_j^{-}(\xi))^{\delta_j}$, $\xi\in V$

(A.2)′ 各 V で $p \geq \sum_{j=1}^{\beta}\beta_j \equiv \tilde{\beta}$ である。 ▨

(A.3)′ 各 V に対して、ある $\tilde{\beta}$ 個の添字 $n(1),\dots,n(\tilde{\beta})$
($1\leq n(i)\leq p$) があって "$L^{n}(\xi)=\det\left(\oint\frac{B_{n(j)}(\xi,\lambda)\lambda^{k-1}}{P^{+}(\xi,\lambda)}d\lambda\right)_{j,k=1,\dots,\tilde{\beta}} \neq 0$ in $\xi\in V$" である。ここで $P^{+}(\xi,\lambda)$
$\equiv\prod_{j=1}^{\beta}(\lambda-\lambda_j^{+}(\xi))^{\beta_j}$ ▨

<u>命題1</u>　$\{P(D), B_j(D), j=1\dots p\}$ が (A.1)〜(A.3) をみたす
⇒ (A.1), (A.2)′, (A.3)′ をみたす。

次の定理は Shibata [9] の結果の Corollary である。

<u>定理2.</u>　$P(D)$ は (A.1) をみたすとする。
(i) system $\{P(D), B_j(D), j=1\dots p\}$ が条件 (A.2), (A.3) を満足する。このとき $\mathbb{R}^{n+1}$ の open cone Γ と integer N で次の性質を満足するものが $\{P(D), B_j(D), j=1\dots p\}$ にのみ依存して決まる。:
(2.3)　$P(D)u=0$ in $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$,　$B_j(D)u|_{y=0}=0$ in $\mathbb{R}^{n}$
なる斉次境界値問題 (2.3) の解 $u(x,y)\in\mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{+}})$ の

$C^\infty([0,\epsilon);\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)) \cap L^2_{loc}(E_{R_0})$ が

(2.4) $$\liminf_{R\to\infty} R^{-1}\int_{\Gamma_1,R} |u(x,y)|^2 dx\,dy = 0$$

を満足すれば，$u(x,y)\equiv 0$ である。ここで $\Gamma_{1,R} \equiv \{(x,y) \in \Gamma_1 : y \geq 0,\ R \leq \sqrt{|x|^2+y^2} \leq 2R\}$, $E_{R_0} \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} ; y \geq 0,\ \sqrt{|x|^2+y^2} \geq R_0\}$, $C^\infty([0,\epsilon);\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)) \equiv \{u ; \langle u(\cdot,y), \varphi(\cdot)\rangle \in C^\infty_y([0,\epsilon))$ for $\forall \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\}$

但し，ϵ，R_0 は u ごとに決まる positive number，また $N \geq 1$.

(ii) system $\{P(D), B_j(D), j=1\cdots p\}$ が，(A.2)′.(A.3)′ のいずれか一つでも満足しなければ，non-trivial な $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ の元で，斉次方程式(2.3)の解が存在する。 ☒

以下，$\{P(D), B_j(D), j=1\cdots p\}$ は (A.1)〜(A.3) を満足しまた(2.1)，(2.2)の右辺 $f(x,y)$，$g_j(x)$ はコンパクト，サポートをもつとする。

(2.5) $$\operatorname{supp} f(x,y) \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} ; y \geq 0, \sqrt{|x|^2+y^2} \leq {}^\exists a\}$$
$$\operatorname{supp} g_j(x) \subset \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| \leq a\}$$

<u>Lemma 1.</u> $\omega \subset V$. small open set.

Γ_2 を $\bigcup_{j=1}^{\gamma}\{\pm(\operatorname{grad}\lambda_j^0(\xi), -1) ; \xi \in \omega\}$ を含む $\mathbb{R}^{n+1}$ の開錐とする。但し $\gamma = 0$ のときは $\Gamma_2 = \emptyset$ とおく。

もし，$u(x,y) \in \mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}) \cap C^\infty([0,\epsilon);\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)) \cap L^2_{loc}$ (E_{R_0}) が (2.1)，(2.2) の解でかつ

(2.6) $\liminf_{R\to\infty} \int_{\Gamma_{2,R}} |u(x,y)|^2 dx dy = 0$

であれば，任意の $\varphi(\xi) \in C_0^\infty(\omega)$ に対して

(2.7) $\langle \sqrt{-1}\, \nu! (D_y - \lambda_j^0(\xi))^{\gamma_j-\nu-1} Q_j^0(\xi, D_y)\hat{u}(\xi,y)|_{y=0}, \varphi(\xi)\rangle$

$= \langle (\frac{\partial}{\partial\lambda})^\nu \hat{f}_0(\xi, \lambda_j^0(\xi)), \varphi(\xi)\rangle, \quad \nu=0,\dots\gamma_j-1,\ j=1\cdots\gamma,$

(2.8) $\langle \sqrt{-1}\, \nu! (D_y - \lambda_j^-(\xi))^{\delta_j-\nu-1} Q_j^-(\xi, D_y)\hat{u}(\xi,y)|_{y=0}, \varphi(\xi)\rangle$

$= \langle (\frac{\partial}{\partial\lambda})^\nu \hat{f}_0(\xi, \lambda_j^-(\xi)), \varphi(\xi)\rangle, \quad \nu=0,\dots\delta_j-1,\ j=1\cdots\delta.$

が成立する。ここで $P(\xi,\lambda)/(\lambda-\lambda_j^0(\xi))^{\gamma_j} \equiv Q_j^0(\xi,\lambda)$，$P(\xi,\lambda)/(\lambda-\lambda_j^-(\xi))^{\delta_j} \equiv Q_j^-(\xi,\lambda)$．また $\hat{f}_0(\xi,\lambda) \equiv \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\exp\{-\sqrt{-1}x\cdot\xi - \sqrt{-1}y\cdot\lambda\}dxdy$，$\hat{u}(\xi,y)$ は $u(x,y)$ の x についての partial Fourier-transform である。 ☒

次に，$R(\zeta)$ の定義からこれは ζ の多項式であるから $R(\zeta)\neq 0$ なる ζ の集合は $\mathbb{C}^n$ の連結集合である。従って定数 d_j, d があって $R(\zeta)\neq 0$ なる ζ について $P(\zeta,\lambda)=0$ の λ についての根は夫々 multiplicity d_j の根が合計 d 個存在する。即ち，$R(\zeta)\neq 0$ なる ζ について $P(\zeta,\lambda)=0$ の λ についての相異なる根を $\lambda_j(\zeta)$ と書けば，$\lambda_j(\zeta)$ は ζ についての multi-valued continuous function かつ $R(\zeta)\neq 0$ なる ζ については解析的関数であり，$P(\zeta,\lambda) = \prod_{j=1}^{d}(\lambda-\lambda_j(\zeta))^{d_j}, (\zeta; R(\zeta)\neq 0.)$

と表わせる。今 $R(\zeta)\neq 0$ なる各 ζ について、$C_k^{\nu,j}(\zeta)$, $k=0,\dots,m-1$, $\nu=0,\dots,d_j-1$, $j=1,\dots,d$ を

$$(2.9)\quad \nu!\,(\lambda-\lambda_j(\zeta))^{d_j-\nu-1}P(\zeta,\lambda)/(\lambda-\lambda_j(\zeta))^{d_j}=\sum_{k=0}^{m-1}C_k^{\nu,j}(\zeta)\lambda^k$$

なる関係式で定義する。また $\hat{f}_0(\zeta,\lambda)$ は (ζ,λ) の整関数であることに注意して $H_k(\zeta)$ を

$$(2.10)\quad (-\sqrt{-1})\sum_{k=0}^{m-1}C_k^{\nu,j}(\zeta)H_k(\zeta)=\left[\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{\nu}\hat{f}_0\right](\zeta,\lambda_j(\zeta))$$
$$\nu=0,\dots,d_j-1,\quad j=1,\dots,d$$

を満足する様に定める。Crumer's rule により

$$(2.10)'\quad (-\sqrt{-1})H_k(\zeta)=\det\begin{pmatrix} C^{0,1}_{m-1}(\zeta),\dots, & C^{0,1}_{k-1}(\zeta), & \hat{f}_0(\zeta,\lambda_1(\zeta)), & C^{0,1}_{k+1}(\zeta),\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \ddots \\ & & & \end{pmatrix}$$

を得る。明らかに $R(\zeta)\neq 0$ なる ζ について一価正則な関数として各 $H_j(\zeta)$ は定義され、更に C^n 全体で局所有界であるから、$H_j(\zeta)$ は整関数に拡張できそれを改めて $H_j(\zeta)$ と書くことにする。そこで Lemma 1 の仮定を満足する $u(x,y)$ が存在するとする。

$$P^+(\xi,\lambda)=\prod_{j=1}^{\beta}(\lambda-\lambda_j^+(\xi))^{\beta_j}=\lambda^{\beta}+\sum_{k=0}^{\beta-1}P_k^+(\xi)\lambda^k,\quad \xi\in V$$

で $p_k^+(\xi)$ を定義すれば，(2.7)，(2.8)(2.9) から任意の $\varphi\in C_0^\infty(\omega)$ について $(\omega\subset V)$

$$(2.11)\quad \Big\langle \Big(D_y^{\hat\beta+i}\hat u(\xi,0)-H_{\hat\beta+i}(\xi)\Big)+\sum_{k=0}^{\hat\beta-1}p_k^+(\xi)\Big(D_y^{k+i}\hat u(\xi,0)-H_{k+i}(\xi)\Big),\ \varphi(\xi)\Big\rangle=0$$
$$i=0,\cdots,\ m-\hat\beta-1,$$

を得る。今 (A.1) から $B_j(D)$ の D_y の order は $m-1$ 以下としてよい。よって

$$(2.12)\quad B_j(\xi,\lambda)=\sum_{j=0}^{m-1}b_k^j(\xi)\lambda^k,\quad b_k^j(\xi)\text{ は }\xi\text{ の多項式},$$

とおく。$\xi\in V$ のとき，$\hat b_k^j(\xi)$ を Euclidean Algorithm を用いて

$$(2.13)\quad B_j(\xi,\lambda)=T_j(\xi,\lambda)P^+(\xi,\lambda)+\sum_{k=0}^{\hat\beta-1}\hat b_k^j(\xi)\lambda^k$$

で定義する。(2.2) (2.11)，(2.12) (2.13) から

$$(2.14)\quad \sum_{k=0}^{\hat\beta-1}\hat b_k^j(\xi)\left[D_y^k\hat u(\xi,0)-H_k(\xi)\right]=G_j(\xi)$$

ここで $\hat g_j(\xi)$ は $g_j(x)$ の Fourier-transform として $G_j(\xi)$ を

$$(2.15)\quad G_j(\xi)=\hat g_j(\xi)-\sum_{k=0}^{m-1}b_k^j(\xi)H_k(\xi)$$

で定義した。今 $g_j(x)\in\mathcal{E}'$ より $\hat g_j(\xi)$ は $\mathbb{C}^n$ 上の entire fun であることに注意しよう。(2.15) から $G_j(\xi)$ は entire fun で

である。条件 (A.2)、(A.3) と命題1から、(A.2)′、(A.3)′ が成立した。従って $\hat{\beta} \leq p$ であり

$$(2.16)\qquad L^{\sigma}(\xi) = \det\left(\hat{b}_{k}^{\sigma(j)}(\xi)\right)_{\substack{j=1,\dots,\hat{\beta} \\ k=0,\dots,\hat{\beta}-1}},\quad \xi \in V$$

であることに注意すれば、$L^{\sigma}(\xi) \neq 0$ なるのについて

$$(2.17)\qquad D_y^{k}\hat{u}(\xi,0) - H_k(\xi) = \sum_{j=1}^{\hat{\beta}} C_{j,k}^{\sigma}(\xi)\, G_{\sigma(j)}(\xi), \quad k=0,\dots,\hat{\beta}-1$$

を得る。但し $C_{j,k}^{\sigma}(\xi)$ は matrix $\left(\hat{b}_{k}^{\sigma(j)}(\xi)\right)_{\substack{j=1,\dots,\hat{\beta} \\ k=1,\dots,\hat{\beta}}}$ の (j、k) cofactor とした。次の条件を考える。

(A.4) 少なくとも $\hat{\beta} < p$ なる V が一つは存在する。∎

今、$\{P(D), B_j(D),\ j=1\cdots p\}$ が (A.1)～(A.3) の他に (A.4) を満足しているとする。このとき、V を (A.4) を満足するものとする。$\hat{\sigma} = (\sigma(1),\dots,\sigma(p))$ なる添字を $\sigma = (\sigma(1),\dots,\sigma(\hat{\beta}))$ が、$L^{\sigma}(\xi) \neq 0$ なるものとし さらに $\sigma(i) \neq \sigma(i')$ if $i \neq i'$、$1 \leq \sigma(i) \leq p$　$\sigma(\hat{\beta}+1) < \cdots < \sigma(p)$ なる条件を満足するものとする。条件 (A.2)、(A.3)、(A.4) からこの様な添字 $\hat{\sigma}$ は少なくとも一つは存在するから V での $\hat{\sigma}$ の全体を Λ とおく。(Λ は Λ_V と書くべきである。) そこで (2.14) (2.17) から

$$(2.18)\quad G_{\sigma(i)}(\xi) = \sum_{j=1}^{\hat\beta}\left[\sum_{k=0}^{\hat\beta-1} \hat b_k^{\sigma(i)}(\xi)\, C_{j,k}^{\sigma}(\xi)\right] G_{\sigma(j)}(\xi)$$
$$i = \hat\beta+1, \cdots p, \qquad \xi \in V$$

を得る。$\hat b_k^{\sigma(i)}(\xi)$, $C_{j,k}^{\sigma}(\xi)$ の作り方から明らかな様に $e_j^{\sigma,i}(\xi) \Leftarrow \sum_{k=0}^{\hat\beta-1} \hat b_k^{\sigma(i)}(\xi)\, C_{j,k}^{\sigma}(\xi)$ とおくと、$\mathbb{E}^{\sigma,i} = (e_1^{\sigma,i}(\xi), \ldots, e_{\hat\beta}^{\sigma,i}(\xi))$ の組は $\mathbb{C}^n$ 全体に解析接続でき、$R(\zeta) \neq 0$ なる ζ については analytic また $\mathbb{C}^n$ 全体で multi-valued continuous function となる。その解析接続の要素を $\mathbb{E}_\ell^{\sigma,i} = (e_{1,\ell}^{\sigma,i}(\xi), \ldots, e_{\hat\beta,\ell}^{\sigma,i}(\xi))$ と表わせば $G_j(\zeta)$ は entire fun であったから (2.18) から

$$(2.1\ \ )\quad G_{\sigma(i)}(\xi) = \sum_{j=1}^{\hat\beta} e_{j,\ell}^{\sigma,i}(\xi)\, G_{\sigma(j)}(\xi), \quad \xi \in V, \quad i = \hat\beta+1, \ldots, p$$

を満足する。$\mathbb{E}_\ell^{\sigma}$ の個数はそのおのおのの factor は代数関数であるから有限個である。

$$(2.20)\quad e_{i,\ell}^{\sigma,i}(\xi) \equiv -1, \qquad e_{j,\ell}^{\sigma,i}(\xi) \equiv 0, \quad \hat\beta+1 \leq j \leq p, \quad j \neq i$$

とおくと (2.19), (2.20) から $i = \hat\beta+1, \ldots p$, 任意の ℓ について

$$(2.21)\quad \sum_{j=1}^{p} e_{j,\ell}^{\sigma,i}(\xi)\, G_{\sigma(j)}(\xi) \equiv 0$$

が成立する。今、$\sigma' = (\sigma'(1), \cdots, \sigma'(p))$ を $\sigma(\sigma'(j)) = j$ で定義すれば (2.21) から

$$(2.22)\quad \sum_{j=1}^{p} e^{\sigma, i}_{\sigma'(j), l}(\xi)\, G_j(\xi) \equiv 0, \quad \xi \in V$$

$e^{\sigma, i}_{\sigma'(j), l}(\xi)$ を改ためて、各Vで決まるということから、$E_j(\xi; V, \sigma, i, l)$ とおくと、条件(A.2)、(A.3)(A.4)を満足する各Vについて、$\sigma \in \Lambda$ から作った$\hat{\sigma}$、i、($\beta+1 \leq i \leq p$)、lに対して、

$$(2.22)' \quad \sum_{j=1}^{p} E_j(\zeta; V, \sigma, i, l)\, G_j(\zeta) = 0, \ \zeta; R(\zeta) \neq 0$$

が成立する。そこで次の条件を考える。

(A.5) $\exists \zeta \in C^n$ s.t matrix $(E_j(\zeta; V, \sigma, i, l))$
の rank は p である。 ▨

今条件(A.5)が満足されていれば、(2.22)′と$G_j(\zeta)$は整関数であることから、

$$(2.23)\quad G_j(\zeta) \equiv 0, \qquad \zeta \in C^n$$

を得る。以上をまとめれば、

Lemma 2. $\{P(D), B_j(D), j=1, \ldots, p\}$ が条件(A.1)〜

(A.5) を満足するものとする。$V_1, \cdots, V_\rho$ を(A.4)が成立しかつ rank ($E_j(\xi; V_k; \sigma, i, l)$) ($k=1\cdots\rho$ を除く) が p となるものとする。$\omega_1, \cdots \omega_\rho$ をそれぞれ $V_1, \cdots, V_\rho$ に含まれる small open set とする。Γ_3 を集合

$$\bigcup_{j=1}^{\rho} \bigcup_{k=1}^{\gamma_{V_j}} \{\pm(\operatorname{grad} \lambda^0_{k, V_j}(\xi), -1); \xi \in \omega_j\}$$

の open conic n.b.d として $\Gamma_{3,R} = \{(x, y) \in \Gamma_3 ; y \geq 0, R < \sqrt{|x|^2 + y^2} < 2R\}$ とおく。境界値問題(2.1)(2.2)の data $f(x, y)$, $g_j(x)$, $j = 1 \cdots p$ は compact support をもつとする。もし (2.1), (2.2) の解 $u(x, y) \in \mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}) \cap C^\infty([0, \epsilon); \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)) \cap L^2_{loc}(E_{R_0})$ で

$$\liminf_{R \to \infty} R^{-1} \int_{\Gamma_{3,R}} |u(x, y)|^2 dx dy = 0 \tag{2.24}$$

なるものが存在すれば、

$$\sum_{k=0}^{m-1} b^j_k(\xi) H_k(\xi) = \hat{g}_j(\xi), \quad j = 1 \cdots p \tag{2.25}$$

を得る。 ▨

次の lemma はよく知られた Malgrange の不等式と Lopatinskii determinant が代数関数であるということから従う。

<u>Lemma. 3.</u> $\{P(D), B_j(D), j = 1, \cdots, p\}$ は(1.1)

~(A.3) を満足するとする。$H_j(\zeta)$を (2.10) or (2.10)' で定義されたものとし、さらに (2.25) を満足しているとする。さらに $f(x,y)$, $g_j(x)$ $j=1\cdots p$ は (2.5) を満足するとする。

$\Rightarrow$ 次の評価を成立させる定数 N と C が存在する:

$$(2.26)\quad |H_j(\zeta)| \leq C(1+|\zeta|)^N e^{a|\mathrm{Im}\,\zeta|},\ \zeta \in \mathbb{C}^n$$

$$j = 0, \cdots, m-1$$

図

Lemma 3 から $h_j(x) = \mathcal{F}^{-1}[H_j](x)$, $j=0\cdots m-1$ ($\mathcal{F}^{-1}[H_j]$ は H_j の Fourier inversion formula) とおくと、$h_j(x) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ が Paley-Wiener-Schwartz theorem から従う。$\rho(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$を 十分小なる $\epsilon_1 > 0$ に対して $\rho(y) = 1$ if $|y| \leq \epsilon_1$, $\rho(y) = 0$ if $|y| \geq 2\epsilon_1$ なるものとする。但し ϵ_1 は

$$\{(x,y) \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+};\ x \in \cup_{j=1}^{p} \mathrm{supp}\, g_j,\ 0 \leq y \leq 2\epsilon_1\} \subset \{(x,y) \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+};\ |(x,y)| \leq a\}$$

なる様にとった。今

$$(2.27)\quad v(x,y) = \left[\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\sqrt{-1}\,y)^j}{j!} h_j(x)\right]\rho(y)$$

とおけば、$D_y^j v(x,y)|_{y=0} = h_j(x)$ に注意すれば

(2.25), (2.27) から

$$\text{(2.28)}\quad \begin{cases} D_y^j v(x, y)|_{y=0} = h_j(x), & j = 0, \cdots, m-1 \\ B_j(D) v(x, y)|_{y=0} = g_j(x), & j = 1, \cdots p \end{cases}$$

を得る。さらに $v(x, y) \in \mathcal{E}'(\overline{R^{n+1}_+}) \cap C^\infty([0, \infty); \mathcal{S}'(R^n))$ である。

(2.29) $\quad w(x, y) = u(x, y) - v(x, y)$

(2.30) $\quad F(x, y) \Leftarrow f(x, y) - P(D) v(x, y)$
$\quad\quad = P(D) w(x, y)$

とおく。$F(x, y) \in \mathcal{E}'(\overline{R^{n+1}_+})$ である。今 $P(\xi, \lambda)$ の irreducible factor $P_j(\xi, \lambda)$ で $j = \alpha' + 1, \cdots \alpha$ については real polynomial に平行ではなかった。

(A.6) 各 j $(\alpha' + 1 \leq j \leq \alpha)$ に対して $\exists \xi_j \in R^n$ s.t $P_j(\xi_j, \lambda) = 0$ の λ 方向の根の中で少なくとも一つは negative imaginary part をもつ。 ▨

<u>Remark.</u> $j = \alpha' + 1, \cdots, \alpha$ について $\xi \in R^n$, $\lambda \in R^1$ として $\overline{P_j}(\xi, \lambda) = \overline{P_j(\xi, \lambda)}$ で定義すれば、

$P_j(\xi,\lambda)$ と $\overline{P_j}(\xi,\lambda)$ は互いに素である。さらにともに既約多項式である 今 $\lambda(\xi)$ が $P_j(\xi,\lambda)=0$ の λ 方向の real な根であれば $\overline{P_j}(\xi,\lambda(\xi))=0$ も満足する。こうして $R_j(\xi)$ を $P_j(\xi,\lambda)$ と $\overline{P_j}(\xi,\lambda)$ の終結式とおくと $A_j=\{\xi\in\mathbb{R}^n;R_j(\xi)=0\}$ とおいて、$\xi\in\mathbb{R}^n-A_j$ のとき $P_j(\xi,\lambda)=0$ の λ 方向の根はすべて non-real である。今 (A. 6) を満足しない real polynomial に平行でない polynomial で irreducible な $P_j(\xi,\lambda)$ については $\xi\in\mathbb{R}^n-A_j$ のとき $P_j(\xi,\lambda)=0$ の λ 方向の根はすべて positive imaginary part をもつ。 ∎

次に $j=1,\cdots,\alpha$, $P_j(\xi,\lambda)$ について考える。これらは real 係数の多項式であった。もし $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$ について $P_j(\xi,\lambda)=0$ の λ 方向の根がすべて real であれば、ある (ξ_0^j,λ_0^j) s.t $P_j(\xi_0^j,\lambda_0^j)=0$, $\frac{\partial P}{\partial\lambda}(\xi_0,\lambda_0)\neq 0$ について open cone Γ_4^j を

Γ_4^j は $\pm\,\mathrm{grad}\,P(\xi_0^j,\lambda_0^j)$ の $\mathbb{R}^{n+1}$ での open conic n.b.d

として 定義する。また $\exists\xi\in\mathbb{R}^n$ について $P_j(\xi,\lambda)$

$=0$ の入方向の根で non-real なものがあるときは

$$\Gamma_4^{j} = \phi$$

と定義する。

<u>Lemma 4.</u> $\{P(D),\ B_j(D),\ j=1,\cdots p\}$ を (A.1) ~(A.6) を満足する system とする。$f(x,y)$, $g_j(x)$ $j=1\cdots p$ は compact support をもつとする。境界値問題 (2.1), (2.2) の解 $u(x,y) \in \mathcal{S}'(R_+^{n+1}) \cap C^\infty([0,\epsilon);\mathcal{S}'(R^n)) \cap L^2_{loc}(E_{R_0})$ が存在しさらに $u(x,y)$ は

$$(2.31)\quad \liminf_{R\to\infty} R^{-1}\int_{\Gamma_{5,R}} |u(x,y)|^2 dxdy = 0$$

を満足するとする。ここで

$$(2.32)\quad \Gamma_5 = \Gamma_3 \cup \bigcup_{j=1}^{\alpha} \Gamma_4^{j},\ \Gamma_{5,R} = \{(x,y)\in\Gamma_5 ;\ y \geq 0,\ R < \sqrt{|x|^2+y^2} < 2R\}$$

とおいた。また Γ_3 は Lemma 2 のものとする。今 $F(x,y)$ を (2.30) で定義されたものとする。

$\Longrightarrow$ $\hat{F}_0(\xi,\lambda)/P(\xi,\lambda)$ は entire function かつ

$$(2.33)\quad |\hat{F}_0(\xi,\lambda)/P(\xi,\lambda)| \leq C(1+|\xi|+|\lambda|)^N e^{a(|\mathrm{Im}\,\xi|+|\mathrm{Im}\,\lambda|)}$$

を満足する。ここで C, N はある positive constant である。 ☒

そこで $W(x, y) \Leftarrow \mathcal{F}^{-1}[\hat{F}_0/P](x, y)|_{y>0}$ とおくと、$W(x, y) \in \mathcal{E}'(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}) \cap \mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ である。また、$P(D)W(x, y) = F(x, y)$. in $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ を満足する。今 $F(x, y) \in C^\infty([0, \epsilon) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ であるから (A.1) より $P(D)$ は y 方向 partial hypoelliptic であることと合わせて、

$$W(x, y) \in C^\infty([0, \epsilon) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{E}'(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$$

を得る。(see Hörmander [1] or Shibata [10]).
今 $P(\xi, \lambda) = 0$ の λ 方向の根 $\lambda_j(\xi)$, $j=1 \cdots m$ は $\xi \in V$ のときすべて real analytic. よって $W(x, y) \in \mathcal{E}'(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ より、任意の $\varphi(\xi) \in C_0^\infty(V)$ について、部分積分により、

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty P(D)W(x, y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sqrt{-1}(x\cdot\xi + y\lambda_j(\xi))}(\sqrt{-1}\,y)^\nu \varphi(\xi)d\xi\right)dxdy$$

$$= \sqrt{-1}\langle \nu!\,(D_y - \lambda_j(\xi))^{d_j-\nu-1}\tilde{T}_j(\xi, D_y)\hat{W}(\xi, y)|_{y=0}, \varphi(\xi)\rangle$$

$$= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^\nu \hat{F}_0(\xi, \lambda_j(\xi)), \varphi(\xi)\right\rangle = 0$$

$0 \leq \nu \leq d_j - 1$, $\quad j = 1, \cdots, d$,

を得る。但し　$P(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^{d} (\lambda - \lambda_j(\xi))^{d_j}$; $\xi \in V$.
よって　$\langle D_y^j \hat{W}(\xi, y)|_{y=0}, \varphi(\xi) \rangle = 0$, $j = 0, \cdots, m-1$
を得る。$D_y^j \hat{W}(\xi, y)|_{y=0}$ は ξ の real analytic function
よって　$D_y^j \hat{W}(\xi, y)|_{y=0} = 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$　を得る。以上から、

$$(2.35) \qquad D_y^j W(x, y)|_{y=0} = 0 \qquad 0 \leq j \leq m-1$$

である。よって　$V(x, y) \Leftarrow W(x, y) + v(x, y)$
とおくと　(2.35) と (2.28) から、

$$B_j(D) V(x, y)|_{y=0} = g_j(x), \quad j = 1, \cdots p$$

また、(2.30), (2.29) から

$$P(D) V(x, y) = F(x, y) + P(D) v(x, y) = f(x, y)$$

さらに　$V(x, y) \in \mathcal{E}'(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}) \cap C^\infty([0, \epsilon); \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$
である。以上をまとめて次の主要定理を得る。

<u>Main Theorem I</u>. $\{P(D), B_j(D), j = 1, \cdots p\}$
を (A.1) ~ (A.3) を満足する system とする。さらに
(A.4) ~ (A.6) を満足するとする。$f(x, y) \in \mathcal{E}'(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$
$g_j(x), j = 1, \cdots p \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ とする。かつ (2.5) をみたす

とする。今 dataを $f(x\cdot y)$, $g_j(x)$, $j=1\cdots p$ とする.
境界値問題 (2.1), (2.2) の解 $u(x\cdot y)\in \mathcal{S}'(\overline{R^{n+1}_+})\cap C^\infty([0\cdot\epsilon); \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))\cap L^2_{loc}(E_{R_0})$ が存在したとする。
$u(x\cdot y)$ が

$$\liminf_{R\to\infty} R^{-1}\int_{\Gamma_{5\cdot R}} |u(x\cdot y)|^2 dxdy = 0$$

なる条件を満足するとする。ここで $\Gamma_{5\cdot R}$ は Lemma 4 のものとする。

$\Rightarrow$ $v(x\cdot y)\in \mathcal{E}'(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})\cap C^\infty([0\cdot\epsilon); \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ で (2.1), (2.2) を満足する $v(x\cdot y)$ が存在する。さらに $\mathrm{supp}\, v(x\cdot y)\subset\{(x\cdot y)\in\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}; \sqrt{|x|^2+y^2}<a\}$.

さらに, $u(x\cdot y)$ が

$$\liminf_{R\to\infty} R^{-1}\int_{\Gamma_{6\cdot R}} |u(x\cdot y)|^2 dxdy = 0$$

を満足する $\Longrightarrow$ $u(x\cdot y)\in\mathcal{E}'(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ である
ここで $\Gamma_6 = \Gamma_5\cup\Gamma_1$, Γ_1 は定理2のものとし, $\Gamma_{6\cdot R}=\{(x\cdot y)\in\Gamma_6 : y\geq 0,\ R<\sqrt{|x|^2+y^2}<2R\}$ とした。 ▨

さらに次の定理が成立する。

<u>Main Theorem II</u> $\{P(D),\ B_j(D),\ j=1,\cdots,p\}$ は (A.1)〜(A.3) を満足する system とする。

もし (A.4)〜(A.6) の中の少なくとも一つの条件を $\{P(D),\ B_j(D),\ j=1\cdots p\}$ は満足しない。

$\Longrightarrow$ 任意の integer N について、ある $u_N(x,y) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}) \cap \mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ で

$$P(D)\,u_N(x,y) \in \mathcal{E}'(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}),$$

$$B_j(D)\,u_N(x,y)\big|_{y=0} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n),\quad j=1,\cdots p$$

$$|u_N(x,y)| \leq C\,(1+|x|+|y|)^{-N},\quad y \geq 0$$

がある constant C について成立する。しかし $u_N(x,y) \notin \mathcal{E}'(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ なるものが存在する。 ☒

Main Theorem II により $\{P(D),\ B_j(D),\ j=1,\cdots p\}$ が (A-1)〜(A.3) を満足する system のとき、条件 (A.4)〜(A-6) は minimal であることがわかる。

References.

1. Hörmander, L. : Linear partial differential operators, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.

2. Hörmander, L. : Lower bounds at infinity for solutions of differential equations with constant coefficients, Israel J. Math. 16 (1973) 106-116.

3. Littman, W. : Decay at infinity of solutions to partial differential equations; removal of the curvature assumption, Israel J. Math. 8 (1970), 403-407.

4. Littman, W. : Decroissance a l'infini des solutions, à l'exterieur d'un cône, d'equations aux derivees partielles a coefficients constants. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 287(3 juillet 1978) Serie A 15-17.

5. Murata, M. : A theorem of Liousille type for partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 21 (1974), 395-404.

6. Murata, M. : Asymptotic behaviors at infinity of solutions of certain linear partial differential equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A Math. 23 (1976), 107- 148.

7. Murata, M. and Shibata, Y. : Lower bounds at infinity of solutions of partial differential equations in the exterior of a proper cone. Israel J. Math. Vol. 31, No. 2, (1978) 193-203.

8. Rellich, F. : Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten, Jahresb. Deutsch. Math Ver. 53 (1943), 57-68.

9. Shibata, Y. : Liousille type theorem for a system $\{P(D), B_j(D), j = 1,\ldots,p\}$ of differential operators with constant coefficients in a half space, to appear in Publ. RIMS. Kyoto Univ.

10. Shibata, Y. : A characterization of the hyperbloic mixed problem in a quarter space for differential operators with constant coefficients, to appear in Publ. RIMS Kyoto Univ.